

---

---

# DAS POLARPLANIMETER

*Analytischer und geometrischer Hintergrund*

---

---

MATHEMATISCHE SAMMLUNG

GEFÖRDERT DURCH



D. ULBRICH

UNIVERSITÄT BREMEN

*Fachbereich* Mathematik und Informatik  
*Arbeitsgruppe* AG Angewandte Analysis  
*Leitung* Prof. Dr. J. Rademacher

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Aufbau und Nutzung . . . . .	2
1.1.1	Ein kleines Beispiel . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Mathematische Erklärung</b>	<b>5</b>
2.1	Geometrische Erklärung: Prinzip von Euler . . . . .	5
2.2	Analytische Erklärung: Green-Riemann'sche Formel . . . . .	7
2.2.1	Beweis 1 . . . . .	8
2.2.2	Beweis 2 . . . . .	12

# 1 Einleitung



Abbildung 1: Jakob Amsler-Laffon (MI 2017)

Wie sind die Erfinder auf dieses Instrument gekommen? Durch Überlegung oder durch Probieren? [...] Wir wissen es nicht.

---

Hans-Joachim Vollrath (Vollrath 2013)

Das *Polarplanimeter* ist ein geometrisches Instrument zur Messung von Flächeninhalten, das vor allem in der Landvermessung zur raschen Bestimmung von Flächengrößen auf Landkarten oder Plänen verwendet wurde. Der Schweizer Mathematiker, Physiker und Ingenieur Jakob Amsler-Laffon (Abbildung 1) erfand das Polarplanimeter im Jahr 1854 (Amsler 1856). Unabhängig von Amsler-Laffon entwickelte auch Albert Miller Ritter von Hauenfels (1818-1897) im Jahr 1855 ein Polarplanimeter, das sich jedoch in der Folge nicht durchsetzte. Ein bedeutender Hersteller war die Firma A. Ott in Kempten, dessen Fabrikat heute als *Ott-Polarplanimeter* bekannt ist. Für eine detaillierte Darstellung der Entwicklungsgeschichte und -linie des Polarplanimeters und anderer Planimeter sei auf (Vollrath 2013; MI 2017) verwiesen.

Geometrische Messinstrumente spielen seit jeher eine wichtige Rolle in den unterschiedlichsten Anwendungsbereichen, sei es in der Nautik, der Astronomie, der Architektur oder in der Geodäsie. Dabei liegen der Konstruktion solcher Messgeräte in der Regel technische und insbesondere auch weitreichende mathematische Ideen zu Grunde. Nicht immer ist jedoch aus historischer Sicht einwandfrei rekonstruierbar, ob die konkrete Erfindung eines Messinstruments auf abstrakte und theoretische Überlegung oder auf geschicktes Ausprobieren zurückgeht. Das *Polarplanimeter* ist hierfür ein gutes Beispiel. Zwar verfügten die Erfinder über gründliche Kenntnisse der höheren Mathematik und hätten die Wirkung des Instruments begründen können, wie sie aber auf die grundlegende mathematische Idee gekommen seien, sei unklar (Vollrath 2013).

Im Folgenden sind wir ausschließlich an dieser mathematischen Idee, d.h. an einer *mathematischen* Erklärung des Polarplanimeters interessiert. Die Frage nach der Mathematik, die sich hinter der Funktionsweise des Polarplanimeters verbirgt, scheint insbesondere dann gerechtfertigt, wenn man Konstruktion und Leistungsfähigkeit des Polarplanimeters einander gegenüber stellt:

*Wie kann ein derart einfach konstruiertes mechanisches Gerät den Inhalt einer beliebig komplexen Fläche direkt ablesbar und exakt bestimmen?*

Der Riemann'sche Integralbegriff etwa basiert auf einer infinitesimalen Zerlegung der zu messenden Fläche in immer feinere Rechtecke, deren Fläche es zu berechnen gilt. Der Nutzer des Polarplanimeters hingegen muss keine derartigen Berechnungen anstellen und überhaupt keinen nennenswerten analytischen Aufwand betreiben, er kann den Inhalt bis auf Kalibrierung schlicht ablesen. Wie funktioniert das, wie *kann* das funktionieren?

Diese Frage kann, eher intuitiv, durch geometrische Überlegungen beantwortet werden (Abschnitt 2.1), aber auch rigoros analytisch (Abschnitt 2.2). Zunächst beschreiben wir jedoch den Aufbau des Polarplanimeters, der wesentlich zum Verständnis der Funktionsweise ist. Anhand des Ott-Polarplanimeters mit verstellbarem Fahrarm erläutern wir außerdem kurz den allgemeinen praktischen Vorgang des Vermessens von Flächen auf maßstabgerechten Landkarten mittels Bestimmung eines geeigneten Kalibrierungsfaktors.

## 1.1 Aufbau und Nutzung

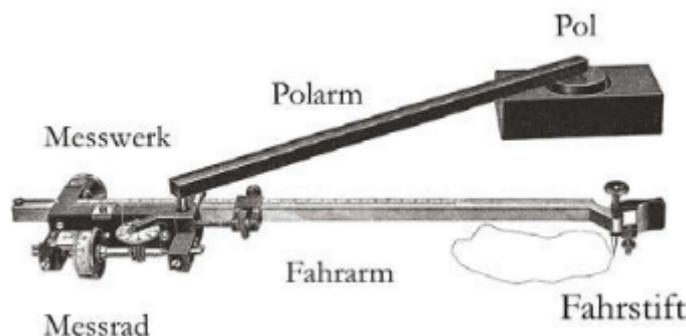


Abbildung 2: Aufbau eines Polarplanimeters (Vollrath 2013)

Das Polarplanimeter besteht aus zwei Armen (Pol- und Fahrarm), die durch ein Gelenk miteinander verbunden sind. Hier betrachten das Ott-Polarplanimeter mit verstellbarem Fahrarm. Am freien Ende des Fahrarms befindet sich ein Fahrstift, mit dem die Randkurve der zu messenden Fläche umfahren wird. Das freie Ende des Polarms ist mit einem Pol beschwert, der auf dem Papier fixiert wird. Am Fahrarm ist in der Nähe des Gelenks ein Messrad angebracht, dessen Drehachse parallel zum Fahrarm ist. Ein Messwerk zeigt den Weg an, den das Messrad bei der Bewegung des Fahrarms zurücklegt. Dabei ist wesentlich, dass das Messrad aufgrund der eben beschriebenen Konstruktion nur Bewegungen registriert, die orthogonal zur Drehachse, d.h. orthogonal zum Fahrarm, stattfinden. Die Bewegungskomponente in Richtung der Drehachse bleibt unberücksichtigt, da das Messrad in dieser Richtung lediglich über das Papier gleitet, aber nicht rollt. Nachdem der Fahrstift vollständig entlang der Kurve geführt wurde und wieder am Ausgangspunkt angelangt ist, kann der zurückgelegte Weg des Messrads am Messwerk (Abbildung 3) abgelesen werden. Dieses besteht aus dem Messrad M, dem Nonius

und der Zählsscheibe Z. Das Messrad ist in 100 Teileinheiten (Messradeinheiten ME) unterteilt und der Nonius unterteilt den Abstand zwischen zwei ME wiederum in 10 Teileinheiten. Dadurch kann der zurückgelegte Weg des Messrads bis auf ein Tausendstel des Radumfangs genau abgelesen werden. Die Zählsscheibe schließlich zeigt die Umdrehungen des Messrads an. Der abzulesende Wert ist also immer vierstellig, wobei die Zählsscheibe die Tausender, das Messrad die Hunderter und Zehner und der Nonius die Einer angibt. Der abgelesene Wert muss abschließend noch mit einem speziellen Kalibrierungsfaktor  $k$  multipliziert werden, der die baulichen Besonderheiten des jeweiligen Polarplanimeters (Radumfang, Lage des Messrads am Fahrarm im Verhältnis zur Fahrarmlänge etc.) sowie Maßstäbe auf Landkarten berücksichtigt. Für gängige Kartenmaßstäbe kann dieser Kalibrierungsfaktor einer dem Polarplanimeter beigelegten Tabelle (Abbildung 4) entnommen werden. Die Bestimmung des Kalibrierungsfaktors beruht auf der Idee der Relativmessung: Soll der Inhalt einer

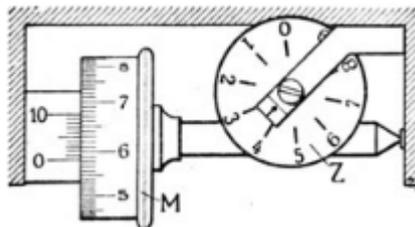


Abbildung 3: Aufbau des Messwerks (Vollrath 2013)

Fläche  $A$  auf einer Landkarte gemessen werden und ergibt die Messung mit dem Polarplanimeter für diese Fläche eine Wegstrecke  $W$ , so kann als Referenz der Quotient  $A_R/W_R$  aus einer bekannten Referenzfläche  $A_R$  und deren gemessener Wegstrecke  $W_R$  herangezogen werden. Der gesuchte Flächeninhalt ist dann gegeben durch

$$A = W \cdot k, k = \frac{A_R}{W_R}. \quad (1)$$

In der Praxis umgeht man diesen Rechenaufwand, indem man den Quotienten  $\nu := A/W$ , den sogenannten absoluten Noniuswert, vor der Messung in der Regel als ganzzahligen Wert in  $\text{mm}^2$ ) festlegt und die Fahrarmlänge  $L_F$  entsprechend anpasst. Für das Ott-Polarplanimeter gilt

$$L_F = 20 \cdot \nu. \quad (2)$$

Der absolute Noniuswert bei einem Kartenmaßstab  $1 : n$  entspricht dann dem Wert des Flächeninhalts auf der Karte, der überstrichen wird, wenn sich das Messrad um eine ME dreht und die Fahrarmlänge entsprechend eingestellt ist. Dieser Kartenflächeninhalt pro ME lässt sich umrechnen in einen Flächeninhalt pro ME in  $\text{m}^2$ . Dieser Flächeninhalt wird mit  $V$  bezeichnet und heißt relativer Noniuswert. Er entspricht der Fläche in der Natur, die pro ME bei gewähltem Kartenmaßstab und passend

eingestelltem Fahrarm überstrichen wird. Für das Ott-Polarplanimeter gilt dabei der Zusammenhang

$$v = V \cdot \left( \frac{1000}{n} \right)^2. \quad (3)$$

Mittels des absoluten bzw. relativen Noniuswerts lässt sich der Messweg des Planimeters dann geeignet kalibrieren, um den Flächeninhalt auf der Karte,  $A_K$ , und in der Natur,  $A_N$ , zu berechnen:

$$A_K = W \cdot v, \quad A_N = W \cdot V. \quad (4)$$

Abschließend sei noch bemerkt, dass den meisten Polarplanimetern Kontrollinstrumente beiliegen,

1 Zeichenmaßstab		3 Noniuswert		5	6	7	8 Näherungswerte für	
Längen- verhältnis	Flächenverhältnis in m <sup>2</sup> für je 10 mm <sup>2</sup>	Relativ V (m <sup>2</sup> )	Absolut v (mm <sup>2</sup> )	Absoluter Noniuswert v (mm <sup>2</sup> )	Rollenabwick- lung für Probe- fläche von 100cm <sup>2</sup>	Näherungswert der Fahrstab- Einstellung L	Konstante C bei massivem Lenkstab	Lenkstab- einstellung für C = 20000
1:1	0,0001	0,0001	10,0	10,24	976,6	205,0	23800	316,0
1:10	0,001	0,001	10,0	10,0	1000,0	200,0	23800	317,6
1:100	0,1	0,1	10,0	9,645	1036,6	192,9	23930	317,6
1:500	2,5	2	8,0	9,5	1052,6	190,0	23990	317,6
1:625	3,906	4	10,24	8,889	1125,6	177,6	24310	317,5
1:720	5,184	5	9,645	8,5	1176,5	170,0	24580	316,0
1:1000	10	5	5,0	8,0	1250,0	160,0	25010	313,6
1:1000	10	10	10,0	7,716	1296,0	154,3	25500	312,0
1:1250	16,625	10	6,4	7,5	1333,3	150,0	25660	310,6
1:1440	20,736	20	9,645	7,109	1406,6	142,2	26090	307,6
1:1500	22,5	20	8,889	7,088	1411,2	141,7	26300	307,0
1:1820	33,124	20	8,036	7,0	1426,6	140,0	26250	306,5
1:2000	40	20	5,0	6,944	1440,0	136,9	26340	306,0
1:2000	40	30	7,5	6,709	1490,6	134,2	26730	304,0
1:2373	66,264	40	7,109	6,4	1562,3	128,0	27310	300,7
1:2400	67,6	40	6,944	6,25	1600,0	125,0	27620	299,0
1:2500	62,5	40	6,4	6,036	1666,2	120,6	28100	296,0
1:2500	62,5	50	8,0	6,026	1668,9	120,6	28130	296,0
1:2730	74,529	50	6,709	6,0	1696,7	120,0	28190	295,4
1:2880	82,944	50	6,026	5,669	1764,0	113,4	29400	292,0
1:3000	90	50	5,556	5,568	1800,0	111,1	29270	289,0
1:3333 1/3	111,111	50	4,5	5,4	1851,9	108,0	29860	286,5
1:3600	129,6	100	7,716	5,12	1953,1	102,4	30810	281,9
1:4000	160	100	6,25	5,0	2000,0	100,0	31260	279,6
1:5000	250	100	4,0	4,882	2046,0	97,6		
1:5760	331,776	200	6,026	4,823	2073,6	96,5		
1:6250	390,625	200	5,12	4,5	2222,2	90,0		
1:6400	409,6	200	4,662	4,0	2500,0	80,0		
1:800	640	400	6,25					
1:8400	705,6	400	5,669					
1:8400	705,6	500	7,066					

Abbildung 4: Kalibrierungstabelle (Fa. Ott ca. 1950)

mit denen man die Genauigkeit überprüfen und gegebenenfalls wiederherstellen kann. Zumeist handelt es sich dabei um ein Kontrolllineal, mit dessen Hilfe man einen Kreis bekannten Flächeninhalts, etwa 100 cm<sup>2</sup>, zeichnen kann. Das Ergebnis  $A_K$  des Planimeters wird dann mit diesem Wert verglichen. Erweist sich das Ergebnis als  $x$  Prozent zu klein/ groß, müssen die Fahrstablängen um  $x$  Prozent vergrößert/ verkleinert werden.

### 1.1.1 Ein kleines Beispiel

**Beispiel 1.** Bestimme die Fläche eines Sees auf einer Landkarte mit Maßstab 1:12000. Als absoluten Noniuswert wähle  $\nu = 10 \text{ mm}^2$ . Das Messwerk zeige nach Umfahren des Flächenrands einen Wert von  $W = 25$

Wir stellen die Länge des Fahrarms gemäß Zeile 2 der Tabelle auf  $L = 200$ . Dann ist

$$A_K = 25 \cdot 10 \text{ mm}^2 = 250 \text{ mm}^2 = 2.5 \text{ cm}^2.$$

Der Flächenmaßstab beträgt 1 : 12000<sup>2</sup>. Somit ist die Fläche des Sees

$$A_N = 2.5 \text{ cm}^2 \cdot 12000^2 = 360\,000\,000 \text{ cm}^2 = 36\,000 \text{ m}^2 = 3.6 \text{ ha}.$$

Alternativ können wir zuerst mittels (3) den relativen Nonius  $V = 1440 \text{ m}^2$  bestimmen und erhalten ebenfalls

$$A_N = W \cdot V = 36\,000 \text{ m}^2 = 3.6 \text{ ha}.$$

Bei einer Fahrarmlänge von 200 und einem Kartenmaßstab von 1:12000 entspricht eine Noniuseinheit des Messwerks, d.h. ein Tausendstel Ausschlag des Messrads, also einer Fläche von  $10 \text{ mm}^2$  auf der Karte und einer Fläche von  $1440 \text{ m}^2$  in der Realität.

## 2 Mathematische Erklärung

Ziel dieses Abschnitts ist ein Beweis des folgenden Satzes (cf. (4)).

**Satz 1.** Der Inhalt  $I(A)$  einer mit dem Polarplanimeter umfahrenden Fläche  $A$  ist proportional zu der vom Messrad zurückgelegten Wegstrecke  $W$ ,  $I(A) \propto W$ .

In der Literatur finden sich *geometrische* und *analytische* Erklärungs- bzw. Beweisansätze. Die geometrischen Ansätze (Jennings 2012; Kunkel 2017) sind illustrativer und eingänglicher, während die analytischen (Leise 2004; Gatterdam 1981; Gollnick 2015) strikter sind.

**Bemerkung 1.** Da wir eine mathematische Abstraktion des Polarplanimeters betrachten und somit individuelle Kenngrößen des Bautyps außer Acht lassen, wird sich im Beweis zu Satz 1 im Vergleich zu (4) ein vom Absolutnonius  $\nu$  verschiedener Proportionalitätsfaktor  $k$  ergeben.

### 2.1 Geometrische Erklärung: Prinzip von Euler

Geometrische Beweise verwenden allesamt das Euler'sche Prinzip, demgemäß eine vom Fahrarm überstrichene infinitesimale Fläche in ein Parallelogramm und ein Dreieck zerlegt werden kann. Der folgende Beweis folgt (Jennings 2012).

*Beweis (Satz 1).* Wir betrachten ein Modell des Polarplanimeters (Abbildung 5) mit Pol  $X$ , Gelenk  $Y$ , Fahrstift  $Z$ , Polarm  $\overline{XY}$  und Fahrarm  $\overline{YZ}$ . Der Fahrarm habe die Länge  $L$  und das Messrad sei in einer Entfernung  $r$  vom Gelenk am Fahrarm angebracht. Das Polarplanimeter wird so positioniert,

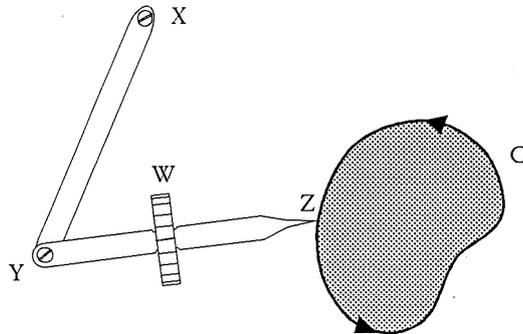


Abbildung 5: Polarplanimeter (Jennings 2012)

dass sich weder Pol- noch Fahrarm während des Umfahrens des Flächenrands um  $360^\circ$  bezüglich ihrer Ausgangslage drehen können. Nun vollziehe der Fahrarm  $\overline{YZ}$  auf der Randfläche eine infinitesimale Bewegung gegen den Uhrzeigersinn. Diese Bewegung werde in eine Translation mit Höhe  $\Delta h$  und eine anschließende Rotation um den Winkel  $\Delta\theta$  zerlegt (Abbildung 6). Die vom Fahrarm

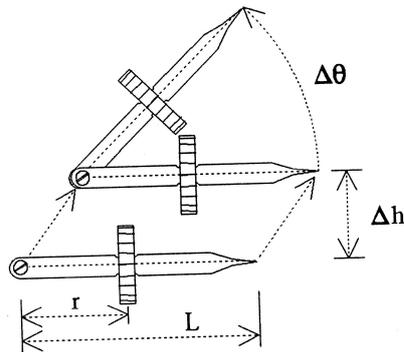


Abbildung 6: Translation und Rotation (Jennings 2012)

überstrichene Fläche  $\Delta A$  setzt sich zusammen aus einem Parallelogramm mit Fläche  $A_P = L\Delta h$  und einem Kreissektor der Fläche  $A_S = \frac{L^2\Delta\theta}{2}$ ,

$$\Delta A = L\Delta h + \frac{1}{2}L^2\Delta\theta \quad (5)$$

Da das Messrad  $W$  nur Bewegungen registriert, die orthogonal zu  $\overline{YZ}$  ablaufen, trägt die Translation mit dem Anteil  $\Delta h$ , und die Rotation mit dem Anteil  $x = \sin(\Delta\theta)r$  zur Drehung  $\Delta D$  des Messrads bei. Da wir den Winkel  $\Delta\theta$  als sehr klein annehmen, gilt die Kleinwinkelnäherung und wir erhalten

$$\Delta D = \Delta h + \Delta\theta r. \quad (6)$$

Umstellen von (6) nach  $\Delta h$  und Substitution in (5) liefert

$$\Delta A = L\Delta D + L\left(\frac{L}{2} - r\right)\Delta\theta. \quad (7)$$

Bezeichnen wir mit  $A$  die gesamte Fläche, die bei der Umrundung des Fahrstifts entlang des Flächenrands vom Fahrarm überstrichen wird, mit  $D$  den gesamten Rollweg des Messrads und mit  $\theta$  den gesamten überstrichenen Winkel, so gilt nach Aufsummierung der infinitesimalen Größen

$$A = LD + L\left(\frac{L}{2} - r\right)\theta. \quad (8)$$

Da der Fahrarm sich schließlich wieder in seiner Ausgangslage befindet, muss  $\theta = 2\pi n, n \in \mathbb{N}_0$  gelten. Nach Voraussetzung kann der Fahrarm jedoch keine Voldrehung vollziehen, also ist  $\theta = 0$  und somit  $A = LD$ , d.h.  $A \propto D$  mit Proportionalitätsfaktor  $L$ .

Es ist noch zu zeigen, dass  $A$  dem Inhalt der vom Fahrstift umfahrenen Fläche  $A_K$  entspricht. Dafür sind zwei Beobachtungen wesentlich:

1. Abhängig davon, in welche Richtung sich der Fahrarm bewegt, ändert sich der Drehsinn des Messrads und es werden entweder Distanzen addiert oder subtrahiert. Dementsprechend werden auch die infinitesimalen Flächen  $\Delta A$  entweder hinzu addiert oder subtrahiert.
2.  $Y$  bewegt sich stets auf einer Kreisbahn mit Zentrum  $X$  und Radius  $\overline{XY}$ .

Bewegt sich der Fahrstift im Gegenuhrzeigersinn vollständig auf der Kurve  $C$  um die zu messende Fläche  $A_K$ , so bewegt sich der Fahrarm aus der Startposition  $\overline{Y_1Z_1}$  heraus nach  $\overline{Y_2Z_2}$  und wieder zurück zu  $\overline{Y_1Z_1}$ . Gleichzeitig bewegt sich  $Y$  dabei auf einer Kreisbahn  $C'$  um  $X$  (Abbildung 7). Die Fläche zwischen den Kurven  $C$  und  $C'$ , die durch  $\overline{Y_1Z_1}$  und  $\overline{Y_2Z_2}$  begrenzt ist, sei als  $A(CC')$  bezeichnet. Die von  $C'$  umschlossene Fläche heiße  $A(C')$ .

Bei der Aufwärtsbewegung von  $\overline{Y_1Z_1}$  nach  $\overline{Y_2Z_2}$  werden  $A_K$  und  $A(CC')$  positiv für die letztendliche Gesamtfläche  $A$  verbucht. Auf dem Rückweg werden  $A(CC')$  und  $A(C')$  von der Gesamtbilanz subtrahiert,

$$A = A_K + A(CC') - (A(CC') + A(C')) = A_K - A(C').$$

Da der Polarm  $\overline{XY}$  jedoch nach Voraussetzung keine volle Drehung vollziehen kann, ist  $C'$  keine vollständige Kreisbahn, sondern lediglich ein Kreissektor. Somit umschließt  $C'$  keine Fläche, d.h.  $A(C') = 0$  und  $A_K = A$ .

□

## 2.2 Analytische Erklärung: Green-Riemann'sche Formel

Die analytischen Beweise basieren auf der folgenden sogenannten Green-Riemann'schen Formel, die ein Spezialfall des Stoke'schen Integralsatzes ist (Forster 2012).

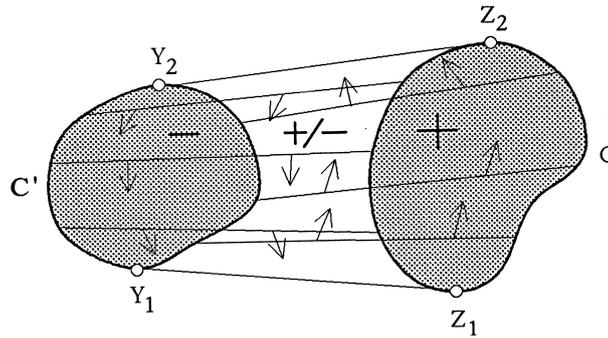


Abbildung 7: Flächenbilanz (Jennings 2012)

**Satz 2.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und seien  $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig partiell differenzierbare Funktionen. Dann gilt für jedes Kompaktum  $A \subset U$  mit glattem Rand  $\partial A = C$

$$\int_C (f dx + g dy) = \int_A \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy \quad (9)$$

**Bemerkung 2.** Hierbei bedeutet das linke Integral das Kurvenintegral 2. Art

$$\oint_{\gamma} F \cdot dz = \oint_a^b \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt$$

mit  $F = (f, g)^T$ ,  $dz = (dx, dy)$  und Parametrisierung  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  des Randes  $C$ .

Wählen wir die Funktionen  $f$  und  $g$  derart, dass  $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 1$ , so erhalten wir

$$\int_C (f dx + g dy) = \int_A dx dy = \text{Fläche von } A. \quad (10)$$

Zwei nahe liegende Wahlen für solche Funktionen sind  $g = x, f \equiv 0$  und  $f = -y, g \equiv 0$  und wir erhalten damit

$$\int_C x dy = - \int_C y dx = \int_A dx dy = \text{Fläche von } A. \quad (11)$$

### 2.2.1 Beweis 1

Für den folgenden Beweis von Satz 1 folgen wir (Leise 2004).

*Beweis (Satz 1).* Der Pol des Planimeters sei im Koordinatenursprung fixiert, der Polarm sei von der Länge  $b$  und der Fahrarm von der Länge  $L$ . Das Messrad sei in der Entfernung  $a$  vom Angelpunkt am Fahrarm montiert (Abbildung 8).

Da sich der Angelpunkt kreisförmig um den Ursprung bewegt, gehen wir über zu Polarkoordinaten, in denen der Angelpunkt die Koordinaten  $(b \cos \varphi, b \sin \varphi)$  habe. Die zugehörigen Koordinaten des Fahrtstift auf dem Flächenrand seien als  $(x, y)$  bezeichnet. Der Fahrtstift werde nun infinitesimal im

Gegenuhrzeigersinn zur Randposition  $(x + dx, y + dy)$  geführt, wobei sich die Koordinaten des Angelpunkts zu  $(b \cos(\varphi + d\varphi), b \sin(\varphi + d\varphi))$  ändern. Linearisierung liefert

$$\cos(\varphi + d\varphi) \approx \cos(\varphi) - \sin(\varphi)d\varphi, \quad \sin(\varphi + d\varphi) \approx \sin(\varphi) + \cos(\varphi)d\varphi. \quad (12)$$

Wie im geometrischen Beweis zerlegen wir die Bewegung von  $(x, y)$  nach  $(x + dx, y + dy)$  in eine Translation und eine Rotation.

1. Translation, d.h. Bewegung des Fahrstifts von  $(x, y)$  nach  $(x - b \sin(\varphi)d\varphi, y + b \cos(\varphi)d\varphi)$  (Parallelverschiebung des Fahrarms entsprechend der neuen Koordinaten des Angelpunkts)
2. Rotation, d.h. Beibehaltung der neuen Position des Angelpunkts und Drehung des Fahrarms um den Winkel  $d\theta$  auf die neue Position  $(x + dx, y + dy)$  des Fahrstifts

Für beide Schritte lassen sich die zum Fahrarm orthogonalen Bewegungskomponenten bestimmen. Der Fahrarm wird in seiner Ausgangslage durch den Verbindungsvektor  $(x - b \cos \varphi, y - b \sin \varphi)$  beschrieben. Dieser ist orthogonal zum Vektor  $(b \sin \varphi - y, x - b \cos \varphi)$ , denn

$$\langle (x - b \cos \varphi, y - b \sin \varphi), (b \sin \varphi - y, x - b \cos \varphi) \rangle = 0 \quad (13)$$

Projizieren wir die durch die Translation vollzogene Veränderung der Fahrstiftposition, beschrieben durch den Vektor  $(-b \sin(\varphi)d\varphi, b \cos(\varphi)d\varphi)$ , orthogonal auf den zum Fahrarm orthogonalen (nun normierten) Vektor, entspricht die Länge des projizierten Vektors der Länge der zum Fahrarm orthogonalen Bewegungskomponente der Translation, d.h. der vom Messrad bei der Translation zurückgelegte Weglänge  $W_T := W_T(x, y, \varphi)$ ,

$$W_T = \left\langle \frac{1}{L} (b \sin \varphi - y, x - b \cos \varphi), (-b \sin(\varphi)d\varphi, b \cos(\varphi)d\varphi) \right\rangle \quad (14)$$

$$= \frac{b}{L} (x \cos \varphi + y \sin \varphi - b) d\varphi \quad (15)$$

Die Weglänge des Messrads, die bei der Rotation zurückgelegt wird,  $W_R := W_R(\theta)$ , ergibt sich mittels Kleinwinkelnäherung als

$$W_R = a \sin(d\theta) \approx a d\theta. \quad (16)$$

Insgesamt legt das Messrad bei der infinitesimalen Bewegung des Fahrstifts von  $(x, y)$  nach  $(x + dx, y + dy)$  also einen Rollweg von  $W_T + W_R$  zurück und der gesamte Rollweg ergibt sich durch Integration über den Rand,

$$\text{Gesamter Rollweg} = \frac{b}{L} \left( \oint_{C'_1} x \cos \varphi d\varphi + \oint_{C'_2} y \sin \varphi d\varphi \right) - \frac{b^2}{L} \oint_C d\varphi + \oint_C d\theta, \quad (17)$$

wobei  $C'_1$  und  $C'_2$  die Kurven in der  $(x, \varphi)$ - bzw.  $(\varphi, y)$ -Ebene seien, die dem Rand  $C$  in der  $(x, y)$ -Ebene entsprechen. Aufgrund der eingeschränkten Bewegungsfreiheit des Angelpunkts sind diese beiden Kurven einfach (d.h. stetig und schnittpunktfrei) und geschlossen.

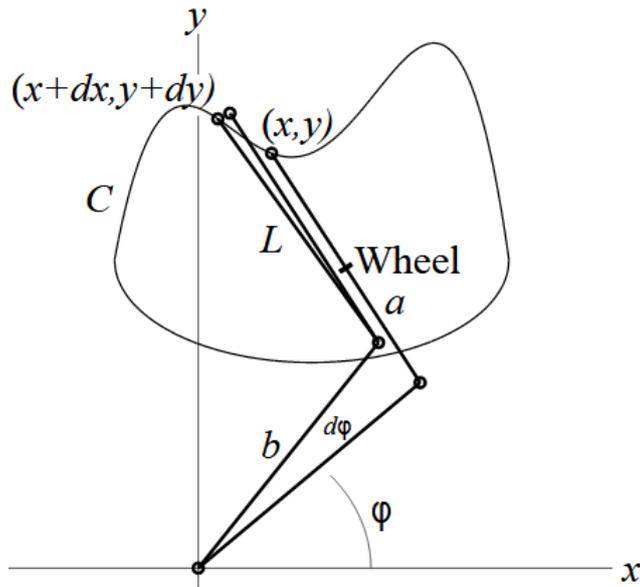


Abbildung 8: Translation und Rotation des Fahrarms (Leise 2004)

Die letzten beiden Integrale in (17) verschwinden, da die Integranden 1-Formen sind: Ist  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Parametrisierung des Randes, so gilt  $\oint_C d\varphi = \varphi(b) - \varphi(a) = 0$  und analog für das andere Integral. Somit gilt:

$$\text{Gesamter Rollweg} = \frac{b}{L} \left( \oint_{C'_1} x \cos \varphi d\varphi + \oint_{C'_2} y \sin \varphi d\varphi \right) \quad (18)$$

Alternativ erhalten wir den Rollweg bezüglich der infinitesimalen Fahrtstiftbewegung von  $(x, y)$  nach  $(x + dx, y + dy)$ , indem wir direkt das Skalarprodukt

$$\left\langle (dx, dy), \frac{1}{L} (b \sin \varphi - y, x - b \cos \varphi) \right\rangle = \frac{x}{L} dy - \frac{y}{L} dx + \frac{b}{L} \sin \varphi dx - \frac{b}{L} \cos \varphi dy \quad (19)$$

aus dem Änderungsvektor  $(dx, dy)$  und dem schon zuvor verwendeten normierten Vektor  $(b \sin \varphi - y, x - b \cos \varphi)$ , der orthogonal zum Fahrarm ist, betrachten. Der gesamte Rollweg ergibt sich dann wieder durch Integrieren über den Rand,

$$\text{Gesamter Rollweg} = \frac{1}{L} \oint_C (x dy - y dx) + \frac{b}{L} \left( \oint_{C'_1} \sin \varphi dx - \oint_{C'_2} \cos \varphi dy \right) \quad (20)$$

$$= \frac{2}{L} \oint_C x dy - \frac{b}{L} \oint_{C'_1} x \cos \varphi d\varphi - \frac{b}{L} \oint_{C'_2} y \sin \varphi d\varphi, \quad (21)$$

wobei sich die letzte Identität aus (11) und

$$x = b \cos \varphi, \quad dx = -b \sin \varphi d\varphi, \quad \sin \varphi = y/b \quad (22)$$

$$y = b \sin \varphi, \quad dy = b \cos \varphi d\varphi, \quad \cos \varphi = x/b \quad (23)$$

ergibt. Gleichsetzen von (18) und (21) liefert

$$\oint_C x dy = b \oint_{C'_1} x \cos \varphi d\varphi + b \oint_{C'_2} y \sin \varphi d\varphi \quad (24)$$

und somit wegen (11) und (18) schließlich:

$$\boxed{\text{Fläche von A} = L \cdot (\text{Gesamter Rollweg})} \quad (25)$$

□

**Bemerkung 3.** Alternativ können wir den vorherigen Beweis ab Zeile (18) auch weiterführen, indem wir zu Polarkoordinaten  $x = r \cos \psi$  und  $y = r \sin \psi$  übergehen und die Identität  $\cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi = \cos(\psi - \varphi)$  ausnutzen (Leise 2013):

$$\text{Gesamter Rollweg} = \frac{b}{L} \oint_C (x \cos \varphi + y \sin \varphi) d\varphi = \frac{b}{L} \oint_{C'} (r \cos \psi \cos \varphi + r \sin \psi \sin \varphi) d\varphi \quad (26)$$

$$= \frac{b}{L} \oint_{C'} r \cos(\psi - \varphi) d\varphi \quad (27)$$

Aus  $L = (x - b \cos \varphi, y - b \sin \varphi)$  folgt  $L^2 = (x - b \cos \varphi)^2 + (y - b \sin \varphi)^2$  und hieraus durch Einsetzen der Polarkoordinaten

$$r \cos(\psi - \varphi) = \frac{r^2 + b^2 - L^2}{2b}, \quad \varphi = \psi - \arccos\left(\frac{r^2 + b^2 - L^2}{2br}\right). \quad (28)$$

sowie

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr = d\psi - \frac{\partial}{\partial r} \arccos\left(\frac{r^2 + b^2 - L^2}{2br}\right) dr \quad (29)$$

$$= d\psi - \left( -\frac{r^2 - b^2 + L^2}{2br^2} \cdot \frac{2br}{\sqrt{4b^2r^2 - (r^2 + b^2 - L^2)^2}} \right) dr \quad (30)$$

$$= d\psi + \frac{r^2 - b^2 + L^2}{r\sqrt{4b^2r^2 - (r^2 + b^2 - L^2)^2}} dr. \quad (31)$$

Für (27) folgt mit der Green-Riemann'schen Formel bzgl.  $r$  und  $\psi$

$$\frac{b}{L} \oint_{C'} r \cos(\psi - \varphi) d\varphi = \frac{b}{L} \oint_{C'} \frac{r^2 + b^2 - L^2}{2b} \left( d\psi + \frac{r^2 - b^2 + L^2}{r\sqrt{4b^2r^2 - (r^2 + b^2 - L^2)^2}} dr \right) \quad (32)$$

$$= \frac{b}{L} \iint_R \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2 + b^2 - L^2}{2b} \right) dr d\psi \quad (33)$$

$$= \frac{1}{L} \iint_R r dr d\psi \quad (34)$$

$$= \frac{1}{L} \text{Fläche von A} \quad (35)$$

Hierbei sind  $C'$  die Kurve in der  $(r, \psi)$ -Ebene, die dem Rand  $C$  in den Polarkoordinaten entspricht und  $R$  die von  $C'$  umschlossene Fläche. Die letzte Identität folgt aus dem Transformationssatz.

### 2.2.2 Beweis 2

Ein weiterer analytischer Beweis für Satz 1, den wir ausführen möchten und der etwas konstruktiver (dafür aber rechnerisch aufwändiger) als die vorherigen ist, findet sich in (Gatterdam 1981); er basiert ebenfalls auf der Green-Riemann'schen Formel und einer idealisierten Darstellung des Polarplanimeters (Abbildung 9). Der Pol  $O$  befinde sich im Koordinatenursprung, sowohl der Polarm  $\overline{OA}$  als der Fahrarm  $\overline{AB}$  seien von der Länge  $L = 1$ .

*Beweis (Satz 1).* Der Fahrstift  $B$  mit Kartesischen Koordinaten  $(x, y)$  und Polarkoordinaten  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$  werde um eine infinitesimale Distanz  $dB$  auf dem Rand  $\partial M$  von  $M$  im Gegenuhrzeigersinn bewegt und  $du$  sei die Bewegungskomponente von  $dB$ , die orthogonal zum Fahrarm ist und daher vom Messrad registriert wird. Der gesamte Rollweg des Messrads ergibt sich durch Integration über den Rand,

$$\text{Gesamter Rollweg} = \oint_{\partial M} du. \quad (36)$$

$du$  werde in die Komponenten  $P dx$  und  $Q dy$  zerlegt,  $du = P dx + Q dy$ . Aus der Green-Riemann'schen Formel folgt

$$\oint_{\partial M} du = \oint_{\partial M} (P dx + Q dy) = \iint_M \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (37)$$

Ziel ist die Bestimmung von  $P(x, y)$  und  $Q(x, y)$ . Aus  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  folgt

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta = \frac{x}{r} dr - y d\theta, \quad (38)$$

$$dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta = \frac{y}{r} dr + x d\theta \quad (39)$$

und hieraus durch Umstellen und Substituieren

$$r dr = x dx + y dy, \quad r^2 d\theta = -y dx + x dy. \quad (40)$$

Für das Dreieck  $OAB$  liefert der Kosinussatz  $1 = 1 + r^2 - 2r \cos \alpha$  und somit  $\alpha = \arccos(r/2)$  sowie  $\phi = \theta + \alpha = \theta + \arccos(r/2)$ . Für das totale Differential folgt

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \phi}{\partial r} dr = d\theta - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{4}}} = d\theta - \frac{1}{\sqrt{4 - r^2}} dr. \quad (41)$$

Approximieren wir die infinitesimale Winkeländerung  $d\phi$  durch  $d\phi \approx \sin \beta d\phi$ , erhalten wir  $du = \cos \beta d\phi$ . Für den fehlenden Winkel im Dreieck  $OAB$  gilt  $180^\circ - 2\alpha$  und damit  $\beta = 180^\circ - (180^\circ -$



$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{2} \right) + x \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-r}{2\sqrt{4-r^2}} + \frac{1}{r\sqrt{4-r^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r^2} \right) \quad (50)$$

und setzen

$$f(r) := \frac{-r}{2\sqrt{4-r^2}} + \frac{1}{r\sqrt{4-r^2}}. \quad (51)$$

Da für *jede* differenzierbare Funktion  $g(r)$  von  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  mit der Kettenregel  $x \frac{\partial g}{\partial y} = x \frac{y}{r} \frac{dg}{dr} = y \frac{x}{r} \frac{dg}{dr} = y \frac{\partial g}{\partial x}$  gilt, gilt insbesondere

$$y \frac{\partial f(r)}{\partial x} - x \frac{\partial f(r)}{\partial y} = 0. \quad (52)$$

Weiter ist wegen  $r^2 = x^2 + y^2$  mit der Quotientenregel

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^2} \right) = \frac{-r^2 + 2x^2}{r^4} = \frac{x^2 - y^2}{r^4} = \frac{r^2 - 2y^2}{r^4} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r^2} \right), \quad (53)$$

sodass

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{2} \right) = 1 \quad (54)$$

und

$$\text{Gesamter Rollweg} = \oint_{\partial M} du = \iint_M dx dy = \text{Fläche von M.} \quad (55)$$

□

## Abbildungsverzeichnis

1	Jakob Amsler-Laffon (MI 2017) . . . . .	1
2	Aufbau eines Polarplanimeters (Vollrath 2013) . . . . .	2
3	Aufbau des Messwerks (Vollrath 2013) . . . . .	3
4	Kalibrierungstabelle (Fa. Ott ca. 1950) . . . . .	4
5	Polarplanimeter (Jennings 2012) . . . . .	6
6	Translation und Rotation (Jennings 2012) . . . . .	6
7	Flächenbilanz (Jennings 2012) . . . . .	8
8	Translation und Rotation des Fahrarms (Leise 2004) . . . . .	10
9	Polarplanimeter (Gatterdam 1981) . . . . .	13

## Literatur

- Amsler, Jakob (1856). *Über die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren insbesondere über einen neuen Planimeter*. Beck.
- Fa. Ott, Albert (ca. 1950). *Gebrauchsanweisung für das Ott-Polarplanimeter mit verstellbarem Fahrarm*. <http://anklick-bar.de/matheprojekt/planimeter-ott.pdf>. Accessed: 2017-07-15.
- Forster, Otto (2012). *Analysis 3: Maß- und Integrationstheorie, Integralsätze im  $\mathbb{R}^n$  und Anwendungen*. Bd. 3. Springer-Verlag.
- Gatterdam, Ronald W (1981). „The planimeter as an example of Green’s theorem“. In: *The American Mathematical Monthly* 88.9, S. 701–704.
- Gollnick, Martin (2015). *Funktionsprinzip von Planimetern*. <http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/caffe/seminarplanimeter.pdf>. Accessed: 2017-07-11.
- Jennings, George A (2012). *Modern geometry with applications*. Springer Science & Business Media.
- Kunkel, Paul (2017). *The Planimeter*. <http://whistlervalley.com/planimeter/planimeter.htm>. Accessed: 2017-07-15.
- Leise, Tanya (2004). *As the Planimeter’s Wheel Turns*. <http://www3.amherst.edu/~tleise/Planimeter/LinearAndPolarPlanimeters.pdf>. Accessed: 2017-07-5.
- (2013). *As the Planimeter’s Wheel Turns: Planimeter Proofs for Calculus Class*. <https://www3.amherst.edu/~tleise/HomePage/LeisePlanimeter.pdf>. Accessed: 2017-07-19.
- MI (2017). *Mathematische Instrumente*. [http://www.mathinstruments.ch/images/amsler/jakob\\_amsler.jpg](http://www.mathinstruments.ch/images/amsler/jakob_amsler.jpg). Accessed: 2017-07-15.
- Vollrath, Hans-Joachim (2013). *Verborgene Ideen: historische mathematische Instrumente*. Springer-Verlag.